

# Probability and Random Processes

## ECS 315

Asst. Prof. Dr. Prapun Suksompong

[prapun@siit.tu.ac.th](mailto:prapun@siit.tu.ac.th)

## 9 Expectation and Variance



### Office Hours:

BKD, 6th floor of Sirindhralai building

Tuesday 9:00-10:00

Wednesday 14:20-15:20

Thursday 9:00-10:00

# Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable  $X$  is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$

- The expected value of a function  $g$  of a RV  $X$  is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

- The **variance** of a RV  $X$  is given by

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV  $X$  is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$



# Example

$$\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

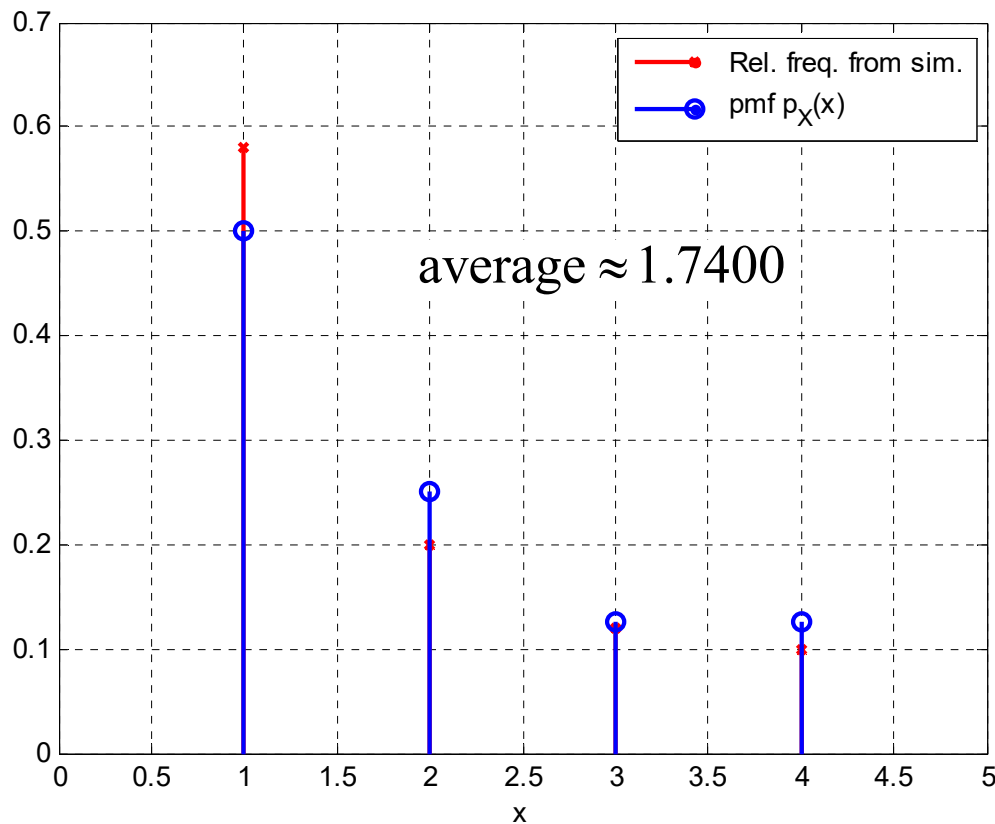
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1, \\ 1/4, & x = 2, \\ 1/8, & x \in \{3, 4\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
2 1 1 2 1 4 1 1 1 1
1 1 4 1 1 2 4 2 2 1
3 1 1 2 3 2 4 1 2 4
2 1 1 2 1 1 3 3 1 1
1 3 4 1 4 1 1 2 4 1
4 1 4 1 2 2 1 4 2 1
4 1 1 1 1 2 1 4 2 4
2 1 1 1 2 1 2 1 3 2
2 1 1 1 1 1 1 2 3 2
2 1 1 2 1 4 2 1 2 1
```

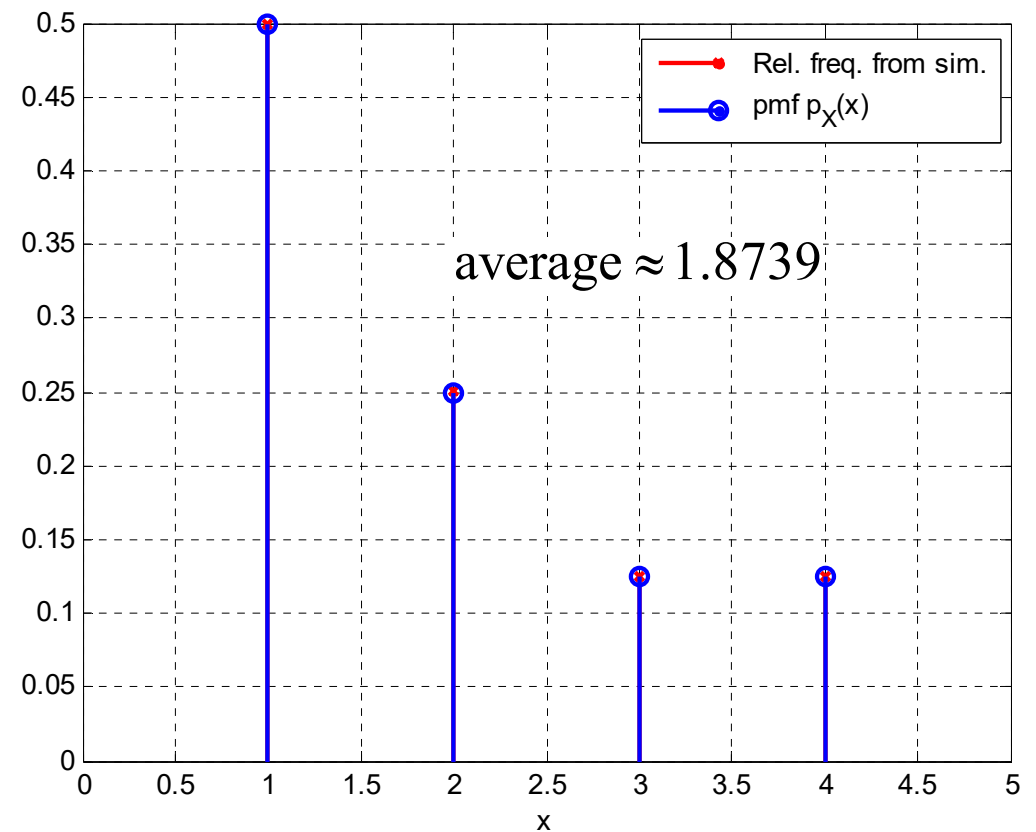


# Example

$n = 100$



$n = 10^6$

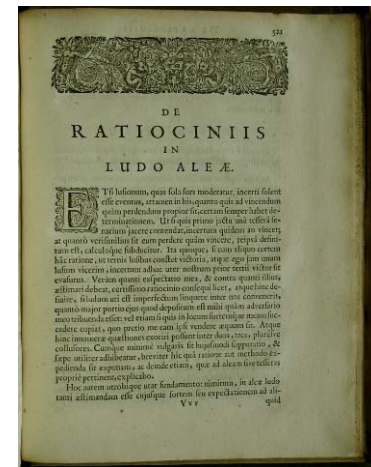


As  $n \rightarrow \infty$ , the average will converge to  $\mathbb{E}X = \frac{15}{8} = 1.875$



# Christiaan Huygens (1629-1695)

- Dutch astronomer
- In 1657, wrote the first treatise (textbook) on probability theory: “On Reasoning in Games of Chance”
  - Van Rekeningh in Spelen van Geluck
  - De ratiociniis in ludo aleae
  - <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/huygens.htm>
- Interest sparked partly by the work of Pascal and Fermat.
- Originally introduced the concept of **expected value**.

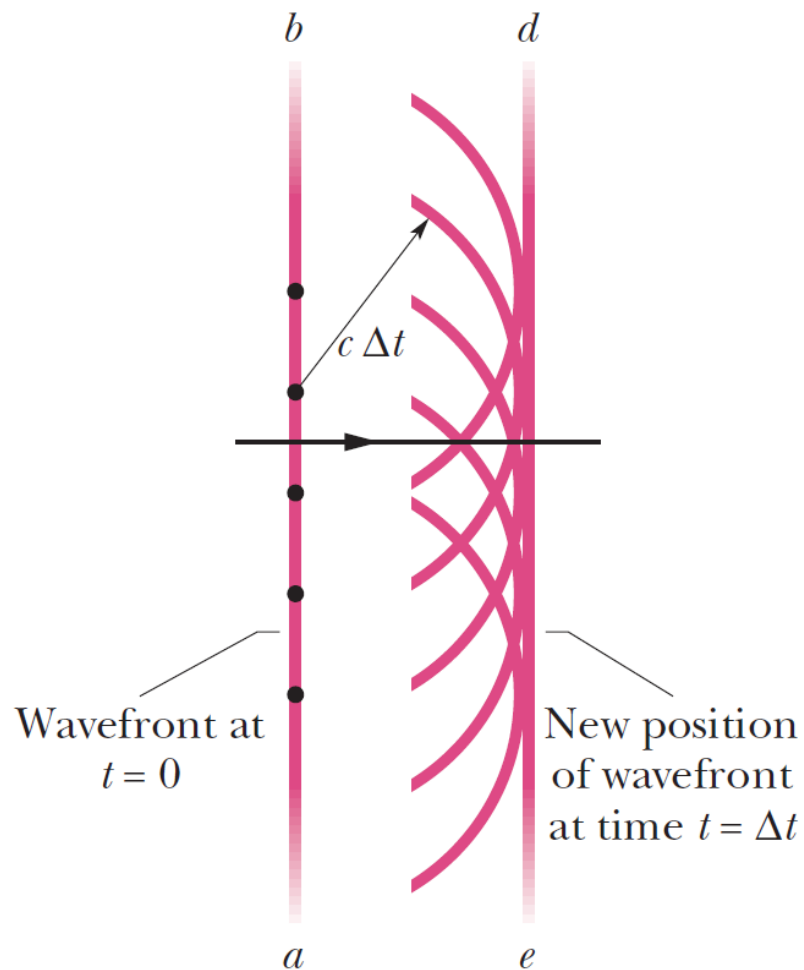


[http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan\\_Huygens#mediaviewer/File:Christiaan\\_Huygens.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg)  
[http://bc.uu.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/Huygens/Images/html/03\\_2.html](http://bc.uu.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/Huygens/Images/html/03_2.html)

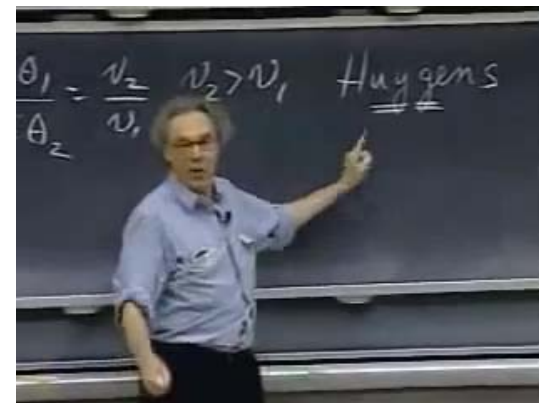


# Christiaan Huygens (1629-1695)

- Also famous for the “**Huygens’ Principle**”



All points on a wavefront serve as point sources of spherical secondary wavelets. After a time  $t$ , the new position of the wavefront will be that of a surface tangent to these secondary wavelets.



# Calculations of Expected Values



sum exp(-alpha) k \* alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha \quad \mathbb{E}X = \alpha$$

n! is the factorial function »

Poisson( $\alpha$ )

sum k \* n!/(k!(n-k)!) \* p^k \* (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = n p$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)



# Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล  
(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 พฤศจิกายน 2552 เป็นต้นไป)

สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับๆ ละ 40 บาท

ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้

รางวัลที่ หนึ่ง	มี	1 รางวัล ๆ ละ	2,000,000 บาท
รางวัลที่ สอง	มี	5 รางวัล ๆ ละ	100,000 บาท
รางวัลที่ สาม	มี	10 รางวัล ๆ ละ	40,000 บาท
รางวัลที่ สี่	มี	50 รางวัล ๆ ละ	20,000 บาท
รางวัลที่ ห้า	มี	100 รางวัล ๆ ละ	10,000 บาท
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	มี	2 รางวัล ๆ ละ	50,000 บาท
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสียง 4 ครั้ง	มี	4,000 รางวัล ๆ ละ	2,000 บาท
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสียง 1 ครั้ง	มี	10,000 รางวัล ๆ ละ	1,000 บาท

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 23,000,000 บาท

รางวัลที่ 1 พิเศษ มี 2 รางวัล แบ่งเป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 01 ถึงชุดที่ 30 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิ์ได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล

กลุ่มที่ 2 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 51 ถึงชุดที่ 70 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิ์ได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล



สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดยุติธรรม									
ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล									
งวดที่ 16 ประจำวันที่ 16 สิงหาคม พ.ศ. 2555									
เป็นงวดที่ 63 สลากกาชาดพิเศษสภากาชาดไทย เป็นงวดที่ 48 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ ศิริราช									
เป็นงวดที่ 38 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ รามาธิบดี									
พิมพ์แจก					ตรวจรางวัลในใจ หรือยื่นหนังสือ โทร. 1900-1900-10 0-2629-1000			ตรวจผ่านทาง Internet www.glo.or.th	
รางวัลที่ 1					เลขท้าย 3 ตัว			เลขท้าย 2 ตัว	
สลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลละ 2,000,000 บาท					รางวัลละ 2,000 บาท			รางวัลละ 1,000 บาท	
สลากกาชาดพิเศษและสลากการกุศล รางวัลละ 3,000,000 บาท									
<b>683877</b>					<b>032</b>	<b>612</b>	<b>730</b>	<b>775</b>	<b>2 8</b>
รางวัลที่ 1 พิเศษ	สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 1 รางวัลละ 30 ล้านบาท ชุดที่	20	หมายเลข	683877					
	สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 2 รางวัลละ 20 ล้านบาท ชุดที่	62	หมายเลข	683877					
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1		รางวัลละ 50,000 บาท			รางวัลที่ 2		รางวัลละ 100,000 บาท		
6 8 3 8 7 6		6 8 3 8 7 8			193867	221117	604811	884831	980179
รางวัลที่ 3		รางวัลละ 40,000 บาท							
011403	073342	115070	258151	271347	301472	304622	558992	884665	897294
รางวัลที่ 4		รางวัลละ 20,000 บาท							
032967	138576	244415	294466	413340	489333	587378	727764	869215	937745
063102	146256	248433	341630	429131	501047	602455	751560	890107	939311
089080	214670	250238	349327	459303	550308	608005	756100	890543	955614
108256	219309	251583	369753	471331	568930	614980	784592	899953	992948
136658	239439	260506	392185	487692	579567	637739	821743	900384	996269
รางวัลที่ 5		รางวัลละ 10,000 บาท							
020184	106799	169191	281684	404802	536738	627081	713064	807726	913963
026416	118454	219308	320426	410730	537552	637029	723025	808419	953376
038792	119505	221805	333524	413290	549048	638158	731046	820575	965902
045281	129862	223867	337108	460092	555644	657335	736670	826723	974542
046893	130225	236534	340069	460709	558116	659391	737270	827400	975085
056328	138767	247702	343903	480080	571304	659776	773972	845269	980457
074613	141161	264348	363957	487653	575135	662978	782542	855606	980807
096773	154062	267268	371975	490633	601996	672696	783096	866715	985181
097349	160338	267500	393699	495203	611947	678287	803491	867061	990506
102320	166180	271282	404326	523074	617576	708080	804956	901106	990572



# Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

ตารางที่ 4 การคำนวณกำไรขาดหวังของสลากกินแบ่งรัฐบาล

ชื่อรางวัล	จำนวนรางวัล	กำไร(1) =เงินรางวัล-ค่าซื้อสลาก <sup>1</sup>	โอกาสที่จะถูกรางวัล (2)
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 30 ล้าน บาท	1	30 ล้าน - 40 บาท	0.00000333 %
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 16 ล้าน บาท	1	16 ล้าน - 40 บาท	0.00000625 %
รางวัลที่ 1	46	2 ล้าน - 40 บาท	0.0001%
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1	92	5 หมื่น - 40 บาท	0.0002%
รางวัลที่ 2	230	1 แสน - 40 บาท	0.0005%
รางวัลที่ 3	460	4 หมื่น - 40 บาท	0.001%
รางวัลที่ 4	2,300	2 หมื่น - 40 บาท	0.005%
รางวัลที่ 5	4,600	1 หมื่น - 40 บาท	0.01%
เลขท้าย 3 ตัว	184,000	2 พัน - 40 บาท	0.4%
เลขท้าย 2 ตัว	460,000	1 พัน - 40 บาท	1.0%
สลากที่ไม่ถูกรางวัลใดๆ	-	-40 บาท	98.58%

<sup>1</sup> ไม่ได้รวมภาษีหัก ณ ที่จ่ายไม่เกินร้อยละ 1 ของเงินรางวัล และจ่ายต่อการคำนวณ

Expected Profit = -16



Assumption



# The New Scheme

## เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล

( ใช้อยู่ตั้งแต่วันที่ 1 กันยายน 2558 เป็นต้นไป )

สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับๆ ละ 40 บาท  
ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้



รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ 1	1 รางวัล	3,000,000
รางวัลที่ 2	5 รางวัล	100,000
รางวัลที่ 3	10 รางวัล	40,000
รางวัลที่ 4	50 รางวัล	20,000
รางวัลที่ 5	100 รางวัล	10,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	50,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสีย 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	2,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสีย 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	2,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสีย 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	1,000


สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 24,000,000 บาท

- ก. เงินรางวัลจะจ่ายแก่ผู้ถือสลากฉบับที่ถูกรางวัลนำมาขอรับ
- ข. ถ้าสลากจำหน่ายไม่หมด เงินรางวัลหนึ่งๆ ต้องลดลงตามส่วน
- ค. ผู้ถูกรางวัลโปรดไปขอรับรางวัลภายใน 2 ปี นับจากวันออกสลาก

**Expected Profit = -16**



# The New Scheme

 สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดยุติธรรม ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล งวดประจำวันที่ 16 ตุลาคม 2559									
ดาวน์โหลด GLO Lottery ได้ที่ Google Play หรือ App Store			ตรวจผลรางวัลทันที หรือย้อนหลังได้ที่ โทร. 1900-1900-10 0-2528-8899				ตรวจผลทาง Internet www.glo.or.th		
รางวัลที่ 1		เลขหน้า 3 ตัว		เลขท้าย 3 ตัว		เลขท้าย 2 ตัว			
สลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลละ 3,000,000 บาท		รางวัลละ 2,000 บาท		รางวัลละ 2,000 บาท		รางวัลละ 1,000 บาท			
<b>571947</b>		<b>692 885</b>		<b>032 587</b>		<b>9 8</b>			
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1		รางวัลละ 50,000 บาท		รางวัลที่ 2		รางวัลละ 100,000 บาท			
5 7 1 9 4 6		5 7 1 9 4 8		157480	347351	747217	869237	881031	
รางวัลที่ 3		รางวัลละ 40,000 บาท							
283168	410130	546183	547649	600368	674934	781416	809809	988847	989156
รางวัลที่ 4		รางวัลละ 20,000 บาท							
038640	124114	253356	332818	466185	533774	602068	705313	774142	868134
053966	208006	272358	365636	467728	553324	633244	739096	807824	870190
065711	220308	288442	396239	482319	562671	642311	744470	808930	926836
092407	225962	300793	446083	499345	573093	649356	759498	838930	931329
115729	233464	308217	447326	528828	583070	702530	764768	841544	960288
รางวัลที่ 5		รางวัลละ 10,000 บาท							
002473	066656	121419	189769	349341	474843	581308	719169	794854	873218
011060	067376	122862	194272	351740	477482	582729	725109	813818	877239
014363	085397	127248	200161	359235	483518	590599	725808	814830	881666
022037	088042	139184	252502	370998	501910	601422	728579	816797	881926
028424	092381	142658	256195	386035	502973	604498	735020	823846	887227
031348	093720	153002	262187	386274	506977	614282	754962	827108	893837
032557	098994	171875	301038	428578	519868	641756	757223	827366	933070
033396	099519	175640	310496	447822	532514	644404	761575	832870	970012
041645	111823	181703	322856	452262	561545	681601	763462	863809	979162
061810	118177	182438	339855	458581	567774	688401	782068	868565	996119

[<http://money.sanook.com/204469/>]

[<http://www.nationtv.tv/main/content/lifestyle/378418937/>]

นายพิภพ ปานแฉ้ม รองนายกเทศมนตรีเทศบาลเมืองคลองหลวง นำสื่อ  
ตเตอร์จำนวนมากติดฝาผนังบ้านของคนที่ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี

## “ตอหวย” ปลง นำหวยมาทำ “วอลเปเปอร์บ้าน”



Can only press once

**INSTANT  
\$1 MILLION**



**50% CHANCE OF  
\$100 MILLION**



# “Similar” Example



ฉันเหมือนคนที่มี**เสือใส่** แต่ยังไม่พอใจกับที่ฉันมี  
เพราะแค่เพียงได้**เจอเสือใหม่** อย่างที่ฉันพอใจอยากจะ**ริบคว่ำ**  
ใครก็เตือนว่าไม่คุ้มกับสิ่งที่ฉันทิ้งไป เพื่อสิ่งที่ฉันยังไม่ได้มา  
ใครก็เตือนอย่าริบร้อนจะ**เสียง**ทำไมนะ แต่มันก็ยังล่ำไปหมดทั้งใจ

ฉันอุตส่าห์**ไม่รักเขา**เพื่อที่จะ**รักเธอ**  
ยอมทุ่มเทหมดแล้วให้เธอ แล้วเธอก็ทิ้งไป  
**เสียเค้า**แล้วยังต้อง**เสียใจ**เธอสอนฉันให้เข้าใจ  
การลงทุน**เสียงเหลือเกิน**



[Stock Exchange of Thailand]

From the SET's website,...



“ การไม่ลงทุน  
มีความเสี่ยงมากกว่า ”



# Computation of $\mathbb{E}[X^2]$



sum exp(-alpha) k^2 \* alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha (\alpha + 1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha + \alpha^2$$

n! is the factorial function »

Poisson( $\alpha$ )

sum k^2 \* n!/(k!(n-k)!) \* p^k \* (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p (n^2 p - n p + n)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)





# Computation of Var X and $\sigma_X$

Binomial(n,p)

sum  $k * n! / (k! * (n-k)!) * p^k * (1-p)^{n-k}$  from  $k = 0$  to  $n$

Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = np$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = np(1-p)$$

sum  $k^2 * n! / (k! * (n-k)!) * p^k * (1-p)^{n-k}$  from  $k = 0$  to  $n$

Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p(n^2 p - n p + n) \quad \mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

$n!$  is the factorial function »

